BAB I

H I M P U N A N

Dalam kehidupan nyata, banyak sekali masalah yang terkait dengan data (objek) yang dikumpulkan berdasarkan kriteria tertentu. Kumpulan data (objek) inilah yang selanjutnya didefinisikan sebagai himpunan. Pada bab awal ini akan dibahas tentang definisi dan keanggotaan suatu himpunan, operasi himpunan dari beberapa jenis himpunan.

1.1 Definisi dan Keanggotaan Suatu Himpunan

Himpunan (*set*) merupakan sekumpulan objek-objek yang berbeda yang dapat didefinisikan dengan jelas. Objek di dalam himpunan dinamakan unsur atau anggota himpunan. Keanggotaan suatu himpunan dinyatakan oleh notasi '$\in$'.

Contoh 1 :

$A = \{x, y, z\}$
$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A.
$w \notin A$: w bukan merupakan anggota himpunan A.

Ada beberapa cara dalam menyatakan himpunan, yaitu :

a. Mencacahkan anggotanya (enumerasi)

Dengan cara ini, himpunan tersebut dinyatakan dengan menyebutkan semua anggota himpunannya di dalam suatu kurung kurawal.

Contoh 2 :

- Himpunan empat bilangan ganjil pertama: $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- Himpunan lima bilangan prima pertama: $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.
- Himpunan bilangan asli yang kurang dari 50 : $C = \{1, 2, ..., 50\}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

b. Menggunakan simbol standar (baku)

Suatu himpunan dapat dinyatakan dalam suatu simbol standar (baku) yang telah diketahui secara umum oleh masyarakat (ilmiah).

Contoh 3 :

N = himpunan bilangan alami (natural) = $\{ 1, 2, ... \}$
Z = himpunan bilangan bulat = $\{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal (semesta pembicaraan) dinotasikan dengan **U**.

Contoh 4 :

Misalkan

$\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

dan $A = \{1, 3, 5\}$ merupakan himpunan bagian dari **U**

3. Menuliskan kriteria (syarat) keanggotaan himpunan

   Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan kriteria (syarat) keanggotaan himpunan tersebut. Himpunan ini dinotasinya sebagai berikut :

   $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh 5 :

(i) A adalah himpunan bilangan asli yang kecil dari 10

$A = \{ x \mid x \leq 10 \text{ dan } x \in \mathbf{N} \}$ atau $A = \{ x \in \mathbf{N} \mid x \leq 10 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(ii) $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah matematika diskrit$\}$

Atau

$M = \{ x$ adalah mahasiswa | ia mengambil kuliah matematika diskrit$\}$

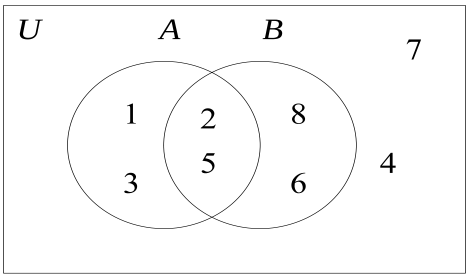
4. Menggunakan Diagram Venn

   Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan anggotanya dalam suatu gambar (diagram) yang dinamakan diagram venn.

Contoh 6 :

Misalkan U = $\{1, 2, \ldots, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Diagram Venn:



Terkait dengan masalah keanggotaan, suatu himpunan dapat dinyatakan sebagai anggota himpunan lain.

Contoh 7 :

a. Misalkan, $M = \{$ *mahasiswa STT Telkom* $\}$

   $M_1 = \{$ *mahasiswa anggota himatel* $\}$

   $M_2 = \{$ *mahasiswa anggota HMTI* $\}$

   $M_3 = \{$ *mahasiswa anggota HMIF* $\}$

   Dengan demikian, $M = \{ M_1, M_2, M_3 \}$

b. Bila $P_1 = \{x, y\}$, $P_2 = \{ \{x, y\} \}$ atau $P_2=\{P_1\}$,

   Sementara itu, $P_3 = \{\{\{x, y\}\}\}$, maka $x \in P_1$ dan $y \notin P_2$,

   sehingga $P_1 \in P_2$, sedangkan $P_1 \notin P_3$, tetapi $P_2 \in P_3$

Jumlah unsur dalam suatu himpunan dinamakan **kardinalitas** dari himpunan tersebut. Misalkan, untuk menyatakan kardinalitas himpunan A ditulis dengan notasi:

$n(A)$ atau $|A|$

Contoh 8 :

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 10 },
atau $B = \{2, 3, 5, 7\}$ maka $|B| = 4$
(ii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

Jika suatu himpunan tidak mempunyai anggota, dengan kata lain dengan kardinalitas himpunan tersebut sama dengan nol maka himpunan tersebut dinamakan himpunan kosong (*null set*). Notasi dari suatu himpunan kosong adalah : $\varnothing$ atau {}

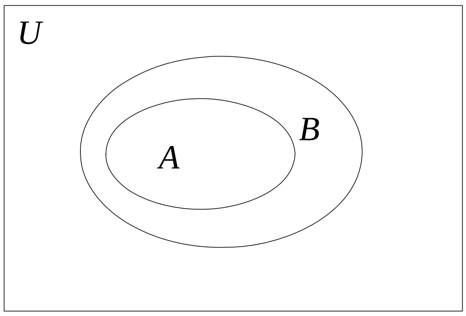
Contoh 9 :

(i) P = {Mahasiswa Teknik Industri STT Telkom yang pernah ke Mars},
maka $n(P) = 0$
Jadi P = $\varnothing$

(ii) $A = \{x \mid$ akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ dan $x \in$ R}, maka $n(A) = 0$
Jadi A = {}

(iii) $B = \{\{\ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai B = $\{\varnothing\}$.
Jadi B bukan himpunan kosong karena ia memuat satu unsur yaitu himpunan kosong.

Himpunan A dikatakan **himpunan bagian** (*subset*) dari himpunan B *jika dan hanya* jika setiap unsur A merupakan unsur dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.
Notasi himpunan bagian : $A \subseteq B$ atau $A \subset B$
Jika digambarkan dalam bentuk diagram Venn himpunan bagian tersebut menjadi :



Contoh 10 :

(i) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$
(ii) $\{2, 3, 5\} \subseteq \{2, 3, 5\}$

Untuk setiap himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).
(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A. Pernyataan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$ *:*

$A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

Yang demikian, A merupakan himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

Contoh 11 :

Misalkan A = {1, 2, 3}.
{1} dan {2, 3} merupakan *proper subset* dari A.

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A merupakan suatu himpunan yang unsur-unsurnya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Himpunan kuasa dinotasikan oleh $P(A)$. Jumlah anggota (kardinal) dari suatu himpunan kuasa bergantung pada kardinal himpunan asal. Misalkan, kardinalitas himpunan A adalah m, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12 :

Jika $A = \{ x, y \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ x \}, \{ y \}, \{ x, y \}\}$

Contoh 13 :

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, sementara itu himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Pernyataan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.
Dua buah himpunan dikatakan sama jika memenuhi kondisi berikut :

$A = B$ *jika dan hanya* jika setiap unsur A merupakan unsur B dan sebaliknya setiap unsur B merupakan unsur A.

Untuk menyatakan $A = B$, yang perlu dibuktikan adalah A adalah himpunan bagian dari B dan B merupakan himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
atau

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Contoh 14 :

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$,
maka $A = B$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$,
maka $A = B$
(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$,
maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
(b) Jika $A = B$, maka $B = A$
(c) Jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

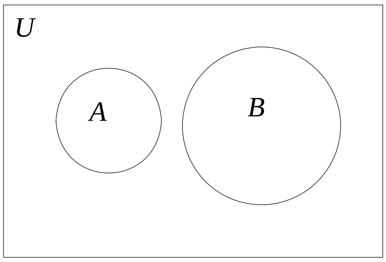
Dua buah himpunan dikatakan **ekivalen** jika masing-masing mempunyai kardinalitas yang sama. Misalkan, himpunan A adalah ekivalen dengan himpunan B berarti kardinal dari himpunan A dan himpunan B adalah sama, notasi yang digunakan adalah : $A \sim B$

Contoh 15 :

Misalkan $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$,

maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki unsur yang sama. Notasi yang digunakan adalah $A // B$. Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah sebagai berikut :



Contoh 16 :

Jika $A = \{ x \mid x \in N, x < 10 \}$ dan $B = \{ 11, 12, 13, 14, 15 \}$,
maka $A // B$.

1.2 Operasi Himpunan

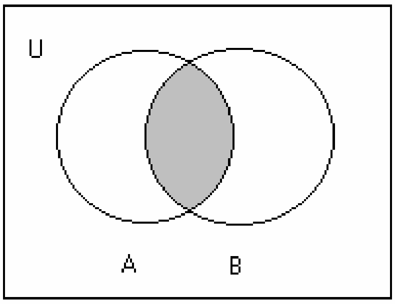
Ada beberapa operasi himpunan yang perlu diketahui, yaitu : irisan , gabungan, komplemen, selisih dan beda setangkup.

a. Irisan (*intersection*)

Irisan antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ‘$\cap$ ‘.
Misalkan A dan B adalah himpunan yang tidak saling lepas, maka

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :



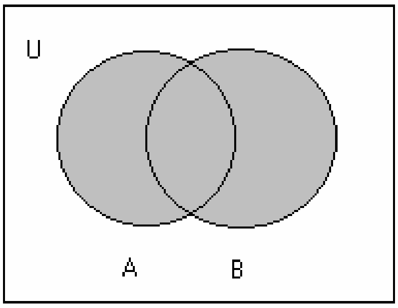
Contoh 17 :

1. Misalkan $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12\}$,
   maka $A \cap B = \{3\}$
2. Misalkan A adalah himpunan mahasiswi TI STT Telkom dan B merupakan himpunan wanita lanjut usia (50 tahun ke atas)
   maka $A \cap B = \emptyset$.
   Hal ini berarti A dan B adalah saling lepas atau $A \,//\, B$.

b. Gabungan (*union*)

Gabungan antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda '$\cup$'.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$



Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :

Contoh 18 :

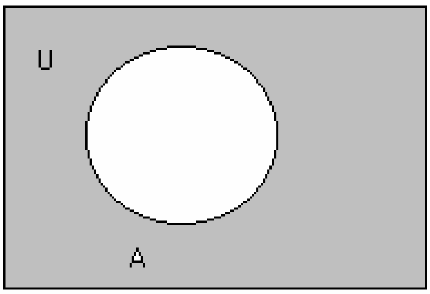
(i) Jika $A = \{ 2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, maka $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
(ii) $A \cup \emptyset = A$

c. Komplemen (*complement*)

Komplemen dari suatu himpunan merupakan unsur -unsur yang ada pada himpunan universal (semesta pembicaraan) kecuali anggota himpunan tersebut. Misalkan A merupakan himpunan yang berada pada semesta pembicaraan **U**, maka komplemen dari himpunan A dinotasikan oleh :

$$\overline{A} = \{ x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A \}$$

Jika dinyatakan dalam b entuk diagram Venn adalah :



Contoh 19 :

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },
jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

jika $A = \{ x \in U \mid x$ habis dibagi dua $\}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 20 :

A = himpunan mahasiswa STT Telkom
B = himpunan mahasiswa yang tinggal di Asrama
C = himpunan mahasiswa angkatan 2004
D = himpunan mahasiswa yang mengambil matematika diskrit
E = himpunan mahasiswa yang membawa motor untuk pergi ke kampus

a. Pernyataan

"Semua mahasiswa STT Telkom angkatan 2004 yang membawa motor untuk pergi ke kampus"

dapat dinyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut :

$$(A \cap C) \cap E$$

b. Pernyataan

"Semua mahasiswa STT Telkom yang tinggal di asrama dan tidak mengambil matematika diskrit"

dapat dinyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut :

$$A \cap B \cap \overline{D}$$

c. Pernyataan

"semua mahasiswa angkatan 2004 yang tidak tinggal di asrama atau tidak membawa motor untuk pergi ke kampus"

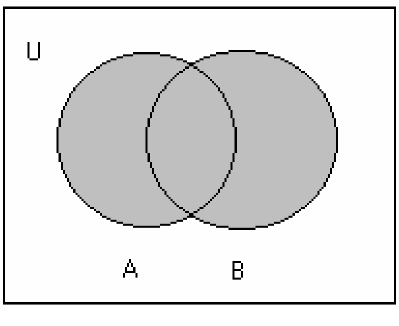
dapat dinyatakan dalam notasi operasi himpunan sebagai berikut :

$$C \cap (\overline{B} \cup \overline{E})$$

d. Selisih (*difference*)

Selisih antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda '– '.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka selisih A dan B dinotasikan oleh

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$$



Contoh 21 :

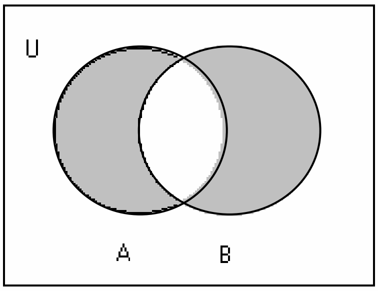
Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5, 7\}$, maka $A - B = \{ 1, 4, 6, 8, 9 \}$
dan $B - A = \varnothing$

e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Beda setangkup antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ‘ $\oplus$ ‘.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup antara A dan B dinotasikan oleh :

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\
&= (A - B) \cup (B - A)
\end{aligned}
$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah :Notasi:



Contoh 22 :

Jika $A = \{ 2, 3, 5, 7\}$ dan $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$,
maka

$$A \oplus B = \{ 1, 4, 7 \}$$

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Perkalian kartesian antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ‘$\times$ ‘.
Misalkan A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian antara A dan B dinotasikan oleh :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$$

Contoh 23 :

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka
$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka
$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Misalkan ada dua himpunan dengan kardinalitas berhingga, maka kardinalitas himpunan hasil dari suatu perkalian kartesian antara dua himpunan tersebut adalah perkalian antara kardinalitas masing-masing himpunan. Dengan demikian, jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Pasangan terurut (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain (a, b) $\neq$ (b, a). Dengan

argumen ini berarti perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu

$$A \times B \neq B \times A$$

dimana A atau B bukan himpunan kosong.

Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka

$$A \times B = B \times A = \varnothing$$

Hukum-hukum yang berlaku untuk operasi himpunan adalah sebagai berikut :

1. Hukum identitas:
   - $A \cup \varnothing = A$
   - $A \cap \mathrm{U} = A$
2. Hukum *null*/dominasi:
   - $A \cap \varnothing = \varnothing$
   - $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen:
   - $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$
   - $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten:
   - $A \cup A = A$
   - $A \cap A = A$
5. Hukum involusi:
   $\overline{(\overline{A})} = A$
6. Hukum penyerapan (absorpsi):
   - $A \cup (A \cap B) = A$
   - $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif:
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
8. Hukum asosiatif:
   - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif:
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
10. Hukum De Morgan:
    - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
    - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum komplemen
    - $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$

– $\overline{U} = \varnothing$

1.3 Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas mengemukakan bahwa dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh 24 :

AS → kemudi mobil di kiri depan
Indonesia → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,
- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Indonesia,
- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip dualitas pada kasus diatas adalah:
Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika *S** merupakan kesamaan yang berupa dual dari *S* maka dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to U$, $U \to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka operasi-operasi tersebut pada kesamaan *S** juga benar.

Tabel 1.1 Dualitas dari Hukum Aljabar Himpunan

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen : $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten : $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan : $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif : $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$	Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$

Contoh 25 :

Misalkan A $\in$ U dimana A = $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
maka pada dualnya, misalkan $\overline{\text{U*}}$, berlaku :

$$A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}).$$

Dalam membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau merepresentasikan suatu pernyataan dengan cara lain dengan menggunakan bantuan himpunan ada beberapa cara, antara lain :

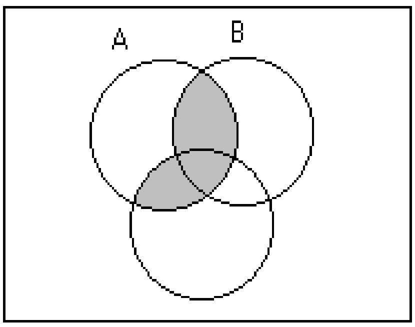
a. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

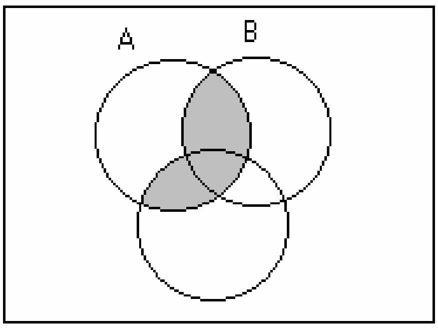
Contoh 26 :

Misalkan A, B, dan C adalah himpunan.
Tunjukan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
dengan diagram Venn.

Jawab :

Cara ini dilakukan bukan dalam pembuktian formal, dengan menggambarkan sejumlah himpunan yang diketahui dan mengarsir setiap operasi yang diinginkan secara bertahap, sehingga diperoleh himpunan hasil operasi secara keseluruhan.





$A \cap (B \cup C)$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b. Beberapa contoh dalam membuktikan pernyataan dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 27 :

Misalkan A dan B himpunan.
Tunjukan bahwa :

$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

Jawab :

$A \cup (B - A)$	$= A \cup (B \cap \overline{A})$	(Definisi operasi selisih)
	$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$	(Hukum distributif)
	$= (A \cup B) \cap U$	(Hukum komplemen)
	$= A \cup B$	(Hukum identitas)

Contoh 28 :

Tunjukan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, berlaku

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Jawab :

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B)$	$= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$	(H. distributif)
	$= U \cap (A \cup B)$	(H. komplemen)
	$= A \cup B$	(H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B)$	$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$	(H. distributif)
	$= \varnothing \cup (A \cap B)$	(H. komplemen)
	$= A \cap B$	(H. identitas)

1.4 Multi Set dan Fuzzy Set

Pada bagian akan diberikan penjelasan tentang *Multi Set* dan *Fuzzi Set.* Sehingga diharapkan pembaca dapat mengetahui perbedaan di antara keduanya.

1.4.1 Multi Set

Himpunan yang unsurnya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut *multi set* (himpunan ganda).

Contoh 29 :

A = {1, 1, 1, 2, 2, 3},
B = {2, 2, 2},

C = {2, 3, 4},
D = {}.

Multiplisitas dari suatu unsur pada *multi set* adalah jumlah kemunculan unsur tersebut
pada *multi set* tersebut.

Contoh 30 :

M = { 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1 },
multiplisitas 1 adalah 4 dan multiplisitas 2 adalah 3, sementara itu multiplisitas 3 adalah 2.

Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap unsurnya adalah 0 atau 1. Himpunan yang multiplisitas dari unsurnya 0 adalah himpunan kosong.
Misalkan P dan Q adalah *multiset*, operasi yang berlaku pada dua buah m*ulti set* tersebut adalah sebagai berikut :

a. $P \cup Q$ merupakan suatu *multiset* yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas maksimum unsur tersebut pada himpunan P dan Q.

Contoh 31 :

$P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan
$Q = \{ a, a, b, c, c \}$,
maka

$P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

b . $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas minimum unsur tersebut pada himpunan P dan Q.

Contoh 32 :

$P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$
maka

$P \cap Q = \{ a, a, c \}$

c. $P - Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas unsur tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, ini berlaku jika jika selisih multiplisitas tersebut adalah positif. Jika selisihnya nol atau negatif maka multiplisitas unsur tersebut adalah nol.

Contoh 33 :

$P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan
$Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$
maka

$P - Q = \{ a, e \}$

d. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas unsurnya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas unsur tersebut pada P dan Q.

Contoh 34 :

$P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
maka

$$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$$

1.4.2 Fuzzy set

Misalkan, **U** merupakan himpunan semesta pembicaraan (Universal Set). **Crisp Set** merupakan himpunan bagian dari **U** yang membedakan antara anggota dan bukan anggotanya dengan batasan yang jelas (pasti).

Contoh 35 :

$A = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ dan } x > 2\}$ atau $A = \{3, 4, 5, \ldots\}$

Jelas bahwa $3 \in A$ dan $1 \notin A$

Pada suatu *Fuzzy set*, anggotanya mempunyai nilai keanggotaan tertentu yang ditentukan oleh *membership function* (fungsi keanggotaan).
Fungsi keanggotaan mempunyai kisaran antara nol dan satu. Notasi dari fungsi keanggotaan adalah $\mu_A(x) = [0,1]$

Contoh 36 :

$A = \{5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$, merupakan crisp set umur dalam tahun.
Fuzzy set "balita", "dewasa", "muda", dan "tua" adalah subset dari *A*.

Tabel 1.2. Kelompok Umur Terhadap Kriteria dalam Fuzzy Set

Elemen	Balita	Anak-anak	Muda	Dewasa	Tua
5	0	1	1	0	0
10	0	1	1	0	0
20	0	0.2	0.8	0.8	0.1
30	0	0	0.5	1	0.2
40	0	0	0.2	1	0.4
50	0	0	0.1	1	0.6
60	0	0	0	1	0.8
70	0	0	0	1	1
80	0	0	0	1	1

Dari tabel di atas perhatikan bahwa :

- Balita = { }
- Anak-anak = {5, 10, 20}
  dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{Anak\text{-}anak} = \{1, 1, 0.2\}$$

- Muda = {5, 10, 20, 30, 40, 50}
  dengan fungsi keanggotaan

  $\mu_{Muda} = \{1, 1, 0.8, 0.5, 0.2, 0.1\}$

- Dewasa = {20, 30, 40, 50, 60, 70, 80}
  dengan fungsi keanggotaan

  $\mu_{Dewasa} = \{0.8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

- Tua = {20, 30, 40, 50, 60, 70, 80}
  dengan fungsi keanggotaan

  $\mu_{Tua} = \{0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1\}$

Ada beberapa cara menyatakan *fuzzy set* yaitu :

1. $Tua = \sum \frac{\mu_{Tua}}{e}$

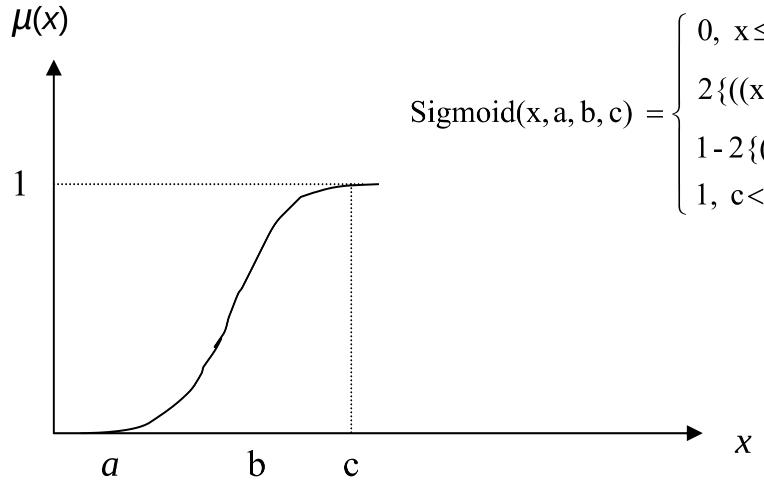
   $= 0.1/20 + 0.2/30 + 0.4/40 + 0.6/50 + 0.8/60 + 1/70 + 1/80$

2. Tua = {0.1/20, 0.2/30, 0.4/40, 0.6/50, 0.8/60, 1/70, 1/80}

3. $Tua = \{(0.1,20),(0.2,30),(0.4,40),(0.6,50),(0.8,60),(1,70),(1,80)\}$

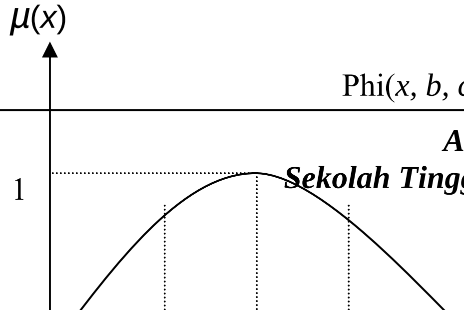
Ada beberapa cara (yang biasa dipakai) dalam menentukan fungsi keanggotaan (*membership function*) suatu *fuzzy set*, antara lain :

1. Fungsi Sigmoid



$$\text{Sigmoid}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 2\{((x-a)/(c-a)\}^2, & a < x \le b \\ 1 - 2\{((x-c)/(c-a)\}^2, & b < x \le c \\ 1, & c < x \end{cases}$$

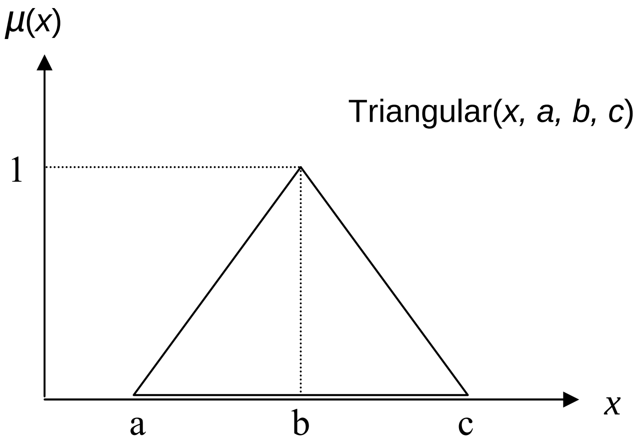
2. Fungsi Phi



$$\text{Phi}(x, b, c) = \begin{cases} \text{Sigmoid}(x, c-b, c-b/2, c), & x \le c \end{cases}$$

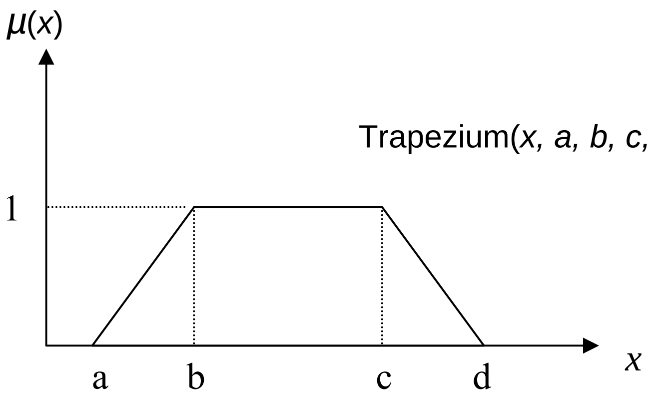
1 - Sigmoid(x, c, c+b/2, c+b), x > c

3. Fungsi Segitiga



$$\text{Triangular}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \le a,\ x \ge c \\ (x\text{-a})/(\text{b-a}), & a < x \le b \\ -(x\text{-c})/(\text{c-b}), & b < x \le c \end{cases}$$

4. Fungsi Trapesium



$$\text{Trapezium}(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \le a,\ x \ge d \\ (x\text{-a})/(\text{b-a}), & a < x \le b \\ 1, & b < x \le c \\ -(x\text{-d})/(\text{d-c}), & c < x \le d \end{cases}$$

Beberapa operasi dasar pada *Fuzzy set* adalah

1. Komplemen (*Complement*) :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Contoh :

$\mu_A(x)$ untuk Tua = {0/5, 0/10, 0.1/20, 0.2/30, 0.4/40, 0.6/50, 0.8/60, 1/70, 1/80}

$\mu_{\bar{A}}(x)$ = Tidak Tua

= {1/5, 1/10, 0.9/20, 0.8/30, 0.6/40, 0.4/50, 0.2/60, 0/70, 0/80}

2. Gabungan (Union / Disjunction) :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Contoh :

$\mu_{muda}(x)$ = {1/5, 1/10, 0.8/20, 0.5/30, 0.2/40, 0.1/50, 0/60, 0/70, 0/80}

$\mu_{tua}(x)$ untuk Tua = {0/5, 0/10, 0.1/20, 0.2/30, 0.4/40, 0.6/50, 0.8/60, 1/70, 1/80}

$\mu_{muda \cup tua}(x)$ = {1/5, 1/10, 0.8/20, 0.5/30, 0.4/40, 0.6/50, 0.8/60, 1/70, 1/80}

3. Irisan (*Intersection* /Conjunction) :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Contoh :

$\mu_{muda \cap tua}(x)$ = {0/5, 0/10, 0.1/20, 0.2/30, 0.2/40, 0.1/50, 0/60, 0/70, 0/80}

Latihan

Untuk no. 1 – 3, Misalkan A = {bilangan asli yang kurang dari sama dengan 500}

1. Tentukan Jumlah (banyaknya) bilangan pada himpunan A yang tidak habis dibagi 3 atau 5 !
2. Tentukan Jumlah (banyaknya) bilangan pada himpunan A yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi 5 !
3. Tentukan Jumlah (banyaknya) bilangan pada himpunan A yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi 5 maupun 7 !
4. Misalkan, jumlah mahasiswa pada suatu kelas adalah 60 orang. 20 orang mahasiswa menyukai kalkulus, 30 menyukai matematika diskrit, dan 10 orang menyukai aljabar linear. 7 orang menyukai kalkulus dan matematika diskrit, 5 orang menyukai matematika diskrit dan aljabar linear, dan 10 orang tidak menyukai ketiga mata kuliah itu.
   a. Tentukan jumlah mahasiswa yang menyukai ketiga mata kuliah tersebut !
   b. Tentukan jumlah mahasiswa yang hanya menyukai satu mata kuliah !
5. Tunjukan bahwa $A - (A - B) = A \cap B$!
6. Suatu perusahaan makanan kaleng jenis ABC, menurut data 1 bulan terakhir, permintaan berkisar antara 1000 – 5000 kemasan/hari. Persediaan barang digudang Berkisar antara 100 – 600 kemasan/hari.
   a. Buat grafik fungsi keanggotaan (linear) untuk himpunan fuzzy tersebut.
      Petunjuk :
      - himpunan fuzzy untuk permintaan adalah turun dan naik
      - himpunan fuzzy untuk persediaan barang adalah sedikit dan banyak
   b. Tentukan nilai keanggotaan saat
      - permintaan 4000 kemasan/hari
      - persediaan barang 300