

## BAB III

### KOMBINATORIK

Persoalan kombinatorik bukan merupakan persoalan yang baru dalam kehidupan nyata. Banyak persoalan kombinatorik yang sederhana telah diselesaikan dalam masyarakat. Misalkan, saat pemilihan pemain untuk tim sepak bola yang terdiri dari 11 pemain. Apabila ada 20 orang ingin membentuk suatu tim sepak bola, ada berapa kemungkinan komposisi pemain yang dapat terbentuk? Contoh lain adalah dalam menentukan sebuah *password* panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan *password* yang dapat dibuat? Tetapi selain itu para ilmuwan pada berbagai bidang juga kerap menemukan sejumlah persoalan yang harus diselesaikan. Pada Bab ini, kita akan membahas tentang kombinatorik, permutasi dan apa yang terkait dengan itu. Kombinatorik merupakan cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

#### 3.1 Prinsip Dasar Menghitung

Dua prinsip dasar yang digunakan dalam menghitung (counting) yaitu aturan penjumlahan dan aturan perkalian.

##### Prinsip Penjumlahan

Jika suatu himpunan  $A$  terbagi kedalam himpunan bagian  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , maka jumlah unsur pada himpunan  $A$  akan sama dengan jumlah semua unsur yang ada pada setiap himpunan bagian  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Secara tidak langsung, pada prinsip penjumlahan, setiap himpunan bagian  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tidak saling tumpang tindih (saling lepas). Untuk himpunan yang saling tumpang tindih tidak berlaku lagi prinsip penjumlahan, dan ini harus diselesaikan dengan prinsip inklusi-eksklusi yang akan dibahas kemudian.

##### Contoh 1 :

Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6. Jika jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang, maka jumlah murid yang diajar guru tersebut adalah  $25 + 27 + 20 = 72$  murid.

##### Contoh 2 :

Seorang mahasiswa ingin membeli sebuah motor. Ia dihadapkan untuk memilih pada satu jenis dari tiga merk motor, Honda 3 pilihan, Suzuki 2 pilihan, dan Yamaha 2 pilihan. Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak  $3 + 2 + 2 = 7$  pilihan.

### Prinsip Perkalian

Misalkan sebuah prosedur dapat dipecah dalam dua penugasan. Penugasan pertama dapat dilakukan dalam  $n_1$  cara, dan tugas kedua dapat dilakukan dalam  $n_2$  cara setelah tugas pertama dilakukan. Dengan demikian, dalam mengerjakan prosedur tersebut ada  $(n_1 \times n_2)$  cara.

Secara tidak langsung, pada prinsip perkalian, bisa terjadi saling tumpang tindih (tidak saling lepas).

#### Contoh 1 :

Berapa banyak string dengan panjang tujuh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1)

#### Jawab :

Setiap suku pada string tersebut mempunyai dua cara pemilihan, yaitu 0 atau 1. Dengan demikian, pada pemilihan string dengan panjang tujuh dapat dilakukan dengan :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 &= 2^7 \\ &= 128 \text{ cara.} \end{aligned}$$

#### Contoh 2 :

Seorang guru SD di daerah, mengajar murid kelas 4, kelas 5 dan kelas 6. Misalkan, jumlah murid kelas 4 adalah 25 orang dan jumlah murid kelas 5 adalah 27 orang serta jumlah murid kelas 6 adalah 20 orang. Jika guru tersebut ingin memilih tiga orang murid dari anak didiknya, dimana seorang murid dari setiap kelas, maka guru tersebut mempunyai  $25 \times 27 \times 20 = 13.500$  cara dalam memilih susunan tiga murid tersebut.

#### Contoh 3 :

Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) dimana

- (a) semua angkanya berbeda
- (b) boleh ada angka yang berulang.

#### Jawab :

- (a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);  
posisi ribuan: 8 kemungkinan angka (1 sampai 9 kecuali angka yang telah dipilih)  
posisi ratusan: 8 kemungkinan angka  
posisi puluhan: 7 kemungkinan angka  
maka banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah  $(5)(8)(8)(7) = 2240$  buah.
- (b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);  
posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)  
posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)  
posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

maka banyak bilangan ganjil seluruhnya adalah  $(5)(9)(10)(10) = 4500$

**Contoh 5 :**

*Password* suatu login pada sistem komputer panjangnya lima sampai tujuh karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf (huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan) atau angka. Berapa banyak *password* yang dapat dibuat untuk suatu login ?

**Jawab :**

Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A – Z) dan banyak angka adalah 10 (0 – 9), jadi seluruhnya 36 karakter.

Untuk *password* dengan panjang 5 karakter, jumlah kemungkinan *password* adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36) = 36^5 = 60.466.176$$

untuk *password* dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan *password* adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$$

dan untuk *password* dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan *password* adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$$

Jumlah seluruh *password* yang mungkin adalah

$$60.466.176 + 2.176.782.336 + 78.364.164.096 = 80.601.412.608 \text{ buah.}$$

Jadi, untuk suatu login akan mempunyai 80.601.412.608 buah kemungkinan *password*.

**Prinsip Inklusi-Eksklusi**

Ketika dua proses dikerjakan dalam waktu yang sama, kita tidak bisa menggunakan prinsip penjumlahan untuk menghitung jumlah cara untuk memilih salah satu dari dua proses tersebut. Untuk menghitung proses tersebut, kita harus mengenal prinsip inklusi-eksklusi.

**Contoh :**

Berapa banyak *byte* yang dapat disusun oleh 8-bit, yang dimulai dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘00’?

**Jawab :**

Misalkan,

*A* adalah himpunan *byte* yang dimulai dengan ‘11’,

*B* adalah himpunan *byte* yang diakhiri dengan ‘00’,

$A \cap B$  adalah himpunan *byte* yang berawal dengan ‘11’ dan berakhir dengan ‘00’, dan

$A \cup B$  adalah himpunan *byte* yang berawal dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘00’

Maka jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan A adalah

$$(1)(1)(2)(2)(2)(2)(2)(2) = 2^6$$

Tulis,  $|A| = 2^6$   
 $= 64$

Sementara itu, jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan B adalah  $(2)(2)(2)(2)(2)(2)(1)(1) = 2^6$

Jadi,  $|B| = 2^6 = 64$ ,

Dengan cara yang sama, jumlah kemungkinan byte yang dapat disusun pada himpunan  $A \cap B$  adalah  $(1)(1)(2)(2)(2)(2)(1)(1) = 2^4$

Sehingga  $|A \cap B| = 2^4 = 16$ .

maka

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 64 + 64 - 16 \\ &= 112. \end{aligned}$$

Dengan demikian, jumlah *byte* yang dapat disusun oleh 8-bit, yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '00' adalah 112 buah.

### 3.2 Permutasi dan Kombinasi

#### Permutasi

Suatu permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan. Dengan kata lain, permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi prinsip perkalian. Misalkan diberikan suatu himpunan A dengan jumlah anggota adalah  $n$ , maka susunan terurut yang terdiri dari  $r$  buah anggota dinamakan permutasi- $r$  dari A, ditulis  $P(n, r)$ . Agar lebih jelas dalam perhitungannya, perhatikan penjelasan berikut ini :

- Jika  $r > n$ , jelas bahwa  $P(n, r) = 0$ , karena tak mungkin menyusun  $r$  anggota dari A yang hanya terdiri dari  $n$  buah anggota dimana  $n < r$ .
- Jika  $r \leq n$ ,

Dari  $n$  anggota A maka urutan pertama yang dipilih dari  $n$  objek adalah dengan  $n$  cara. Urutan kedua dipilih dari  $n - 1$  objek, adalah dengan  $n - 1$  cara, karena satu anggota telah terpilih. Urutan ketiga dipilih dari  $n - 2$  objek, adalah dengan  $n - 2$  cara, karena dua anggota telah terpilih. Hal ini dilakukan terus menerus sehingga urutan terakhir dipilih dari  $n - r + 1$  objek yang tersisa. Menurut kaidah perkalian, pemilihan objek dalam susunan  $r$  buah objek dari  $n$  buah objek dapat dilakukan dengan :

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) \text{ cara}$$

Dengan demikian, permutasi  $r$  objek dari  $n$  buah objek adalah jumlah kemungkinan urutan  $r$  buah objek yang dipilih dari  $n$  buah objek, dengan  $r \leq n$ , pada setiap kemungkinan penyusunan  $r$  buah objek tidak ada urutan objek yang sama, yaitu :

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) \\ &= \frac{n!}{(n - r)!} \end{aligned}$$

**Contoh 1 :**

Misalkan  $S = \{p, q, r\}$ . Berapa cara yang mungkin dalam penyusunan dua huruf pada  $S$  sehingga tidak ada urutan yang sama ?

**Jawab :**

Susunan dua huruf yang mungkin adalah :

$$pq, pr, qr, qp, rp, rq$$

Jadi penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara.

Dalam penyusunan ini, dapat menggunakan definisi permutasi, yaitu :

$$\begin{aligned} P(3, 2) &= \frac{3!}{(3-2)!} \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan definisi permutasi, penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara.

**Contoh 2 :**

Misalkan kita mempunyai lima buah bola dengan warna yang berbeda satu sama lain dan 3 buah kotak. Kita akan memasukan bola tersebut kedalam kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan bola dengan warna berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

**Jawab :**

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 3 bola (ada 3 pilihan).

$$\begin{aligned} \text{Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola} &= (5)(4)(3) \\ &= 60 \end{aligned}$$

Jika menggunakan definisi permutasi maka :

$$\begin{aligned} P(5, 3) &= \frac{5!}{(5-3)!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \\ &= 60 \end{aligned}$$

**Kombinasi**

Misalkan  $r$  merupakan unsur bilangan bulat tak negatif. Yang dimaksud dengan kombinasi  $r$  dari suatu himpunan  $B$  yang terdiri dari  $n$  anggota (objek) yang berbeda adalah jumlah himpunan bagian dari  $B$  yang memiliki anggota  $r$  buah objek. Interpretasi yang lain tentang kombinasi adalah menyusun (memilih) objek sejumlah  $r$  dari  $n$  buah objek yang ada.

**Contoh 1 :**

Misalkan  $A = \{p, q, r\}$ , tentukan semua himpunan bagian dari  $A$  yang memiliki kardinalitas dua.

**Jawab :**

Himpunan bagian tersebut antara lain :  $\{p, q\}$ ,  $\{p, r\}$ , dan  $\{q, r\}$ .

Jadi kita mempunyai empat kombinasi :

$pq, pr, \text{ dan } qr$

Pada himpunan, urutan unsur pada himpunan tidak diperhatikan. Dengan demikian, kombinasi 2 dari himpunan  $A$  (penyusunan dua huruf tanpa memperhatikan urutan) adalah 3, yaitu  $pq, pr, \text{ dan } qr$ . Ini berbeda, pada saat kita mendefinisikan permutasi (urutan diperhatikan), penyusunan tersebut dapat dilakukan dengan enam buah cara, yaitu  $pq, pr, qr, qp, rp, \text{ dan } rq$ .

**Contoh 2 :**

Misalkan ada 2 buah bola yang berwarna sama dan 3 buah kotak. Bola akan dimasukkan ke dalam kotak sehingga setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola. Berapa jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak tersebut ?

**Jawab :**

Misalkan ketiga kotak tersebut ditaruh memanjang, maka ada 3 cara memasukkan dua bola tersebut kedalam kotak, yaitu :

Cara I : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak pertama (kotak I dan kotak II).

Cara II : kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak yang paling ujung (kotak I dan kotak III) .

Cara III: kedua bola masing-masing ditaruh pada dua kotak terakhir (kotak II dan Kotak III) .

Secara umum, jumlah cara memasukkan  $r$  buah bola yang berwarna sama ke dalam  $n$  buah kotak adalah :

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ini merupakan rumus umum kombinasi yang dinotasikan oleh  $C(n, r)$  atau  $\binom{n}{r}$

Diketahui ada  $n$  buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama) akan dimasukkan kedalam  $n$  buah kotak. Misalnya komposisi bola tersebut adalah :

$n_1$  bola diantaranya berwarna 1,

$n_2$  bola diantaranya berwarna 2,

⋮

$n_k$  bola diantaranya berwarna  $k$ ,

jadi  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Berapa jumlah cara pengaturan  $n$  buah bola ke dalam **kotak-kotak tersebut** (tiap kotak maksimum satu buah bola) ?

Jika  $n$  buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan  $n$  buah bola ke dalam  $n$  buah kotak adalah

$$P(n, n) = n!$$

Dari pengaturan  $n$  buah bola itu,

ada  $n_1!$  cara memasukkan bola berwarna 1

ada  $n_2!$  cara memasukkan bola berwarna 2

⋮

ada  $n_k!$  cara memasukkan bola berwarna  $k$

Permutasi  $n$  buah bola yang mana  $n_1$  diantaranya berwarna 1,  $n_2$  bola berwarna 2, ...,  $n_k$  bola berwarna  $k$  adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Cara lain:

Ada  $C(n, n_1)$  cara untuk menempatkan  $n_1$  buah bola yang berwarna 1.

Ada  $C(n - n_1, n_2)$  cara untuk menempatkan  $n_2$  buah bola berwarna 2.

Ada  $C(n - n_1 - n_2, n_3)$  cara untuk menempatkan  $n_3$  buah bola berwarna 3.

⋮

Ada  $C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k)$  cara untuk menempatkan  $n_k$  buah bola berwarna  $k$ .

Jumlah cara pengaturan seluruh bola ke dalam kotak adalah:

$$\begin{aligned} C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) &= C(n, n_1) C(n - n_1, n_2) C(n - n_1 - n_2, n_3) \\ &\quad \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k) \\ &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3!(n - n_1 - n_2 - n_3)!} \\ &\quad \dots \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1})!}{n_k!(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1} - n_k)!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} \end{aligned}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

### Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat  $r$  buah bola yang semua warnanya sama dan  $n$  buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola:  $C(n, r)$ .

(ii) Jika masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Maka Jumlah cara memasukkan bola:  $C(n + r - 1, r)$ .

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$





Jabarkan  $(2x - 3)^3$ .

**Jawab :**

Misalkan  $a = 2x$  dan  $b = -3$ ,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0) a^3 + C(3, 1) a^2 b^1 + C(3, 2) a^1 b^2 + C(3, 3) b^3 \\ &= 1 (2x)^3 + 3 (2x)^2 (-3) + 3 (2x) (-3)^2 + 1 (-3)^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27\end{aligned}$$

**Contoh :**

Tentukan suku kelima dari penjabaran perpangkatan  $(x - y)^5$ .

**Jawab :**

$$(x - y)^5 = (x + (-y))^5.$$

Suku kelima dari hasil penjabaran adalah:

$$C(5, 4) x^{5-4} (-y)^4 = -10 x y^4.$$

**Latihan :**

1. Tentukan nilai :
  - a.  $P(6, 3)$
  - b.  $C(5, 1)$
2. Berapa kali akan muncul string yang terdiri dari unsur pada  $abcdefgh$  yang memuat string  $abc$  pada string tersebut.
3. Berapa banyak string dengan panjang sepuluh yang mungkin terbentuk dari dua bit (0 dan 1), yang memuat angka satu tepat tujuh buah.
4. Dalam suatu pacuan kuda dengan 12 peserta (diasumsikan semuanya dapat mencapai finish), Berapa jumlah kemungkinan susunan pemenang (pertama, kedua, dan ketiga) dalam pacuan tersebut.
5. Pada toko '*duny donut*' menyediakan empat jenis donat dengan rasa yang berbeda (stok masing-masing rasa 10 buah). Berapa jumlah cara pengambilan, jika seseorang membeli donat tersebut enam buah.
6. Dengan menggunakan teorema binomial, tentukan :
  - a. koefisien  $x^5y^8$  dalam  $(x + y)^{13}$
  - b. koefisien  $x^7$  dalam  $(1 + x)^{11}$
  - c. koefisien  $x^9$  dalam  $(1 - x)^{19}$