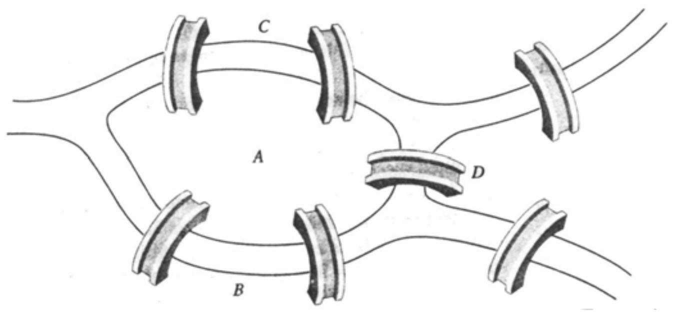
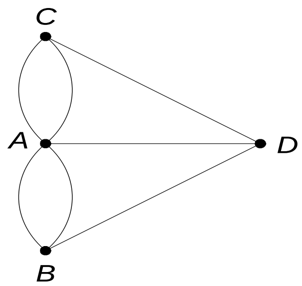
BAB IV
TEORI GRAF

Teori graf merupakan pokok bahasan yang banyak penerapannya pada masa kini. Pemakaian teori graf telah banyak dirasakan dalam berbagai ilmu, antara lain : optimisasi jaringan, ekonomi, psikologi, genetika, riset operasi (OR), dan lain-lain. Makalah pertama tentang teori graf ditulis pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler. Ia menggunakan teori graf untuk menyelesaikan masalah jembatan Königsberg (sekarang, bernama Kaliningrad). Berikut adalah ilustrasi masalah tersebut :



Gambar 4.1. Masalah Jembatan Königsberg (**Rossen**, 2003)

Masalah yang dikemukakan Euler : Dapatkah melewati setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula? Berikut adalah sketsa yang merepresentasikan ilustrasi jembatan Königsberg yang pada gambar diatas. Himpunan titik yaitu {A, B, C, D} merepresentasikan sebagai daratan, dan garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah sebagai jembatan.



Gambar 4.2. Representasi graf masalah jembatan Königsberg

Jawaban pertanyaan Euler adalah tidak mungkin. Agar bisa melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula maka jumlah jembatan yang menghubungkan setiap daratan harus genap.

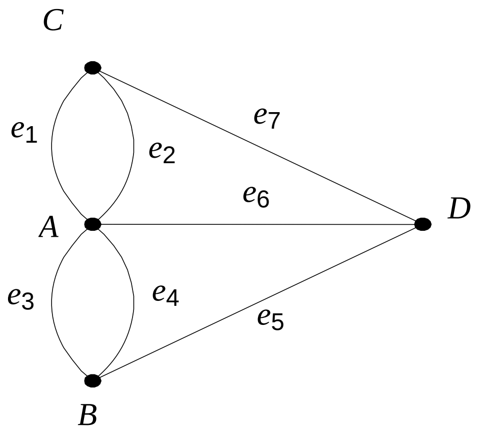
4.1 Definisi Graf

Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah berhingga obyek yang disebut simpul (*vertices*, *vertex*) dan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul terseut. terdiri dari dari Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
Notasi sebuah graf adalah $G = (V, E)$, dimana :

- V merupakan himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices*), misalkan $V = \{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$
- E merupakan himpunan sisi – sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul, misalkan $E = \{e_1 , e_2 , ... , e_n \}$

Contoh :

Graf dari masalah jembatan Königsberg dapat disajikan sebagai berikut :



Misalkan graf tersebut adalah $G(V, E)$ dengan

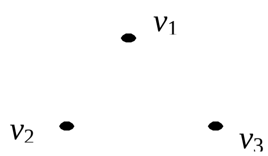
$V = \{ A, B, C, D \}$
$E = \{ (A, C), (A, C), (A, B), (A, B), (B, D), (A, D), (C, D)\}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Pada graf tersebut sisi $e_1 = (A, C)$ dan sisi $e_2 = (A, C)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul A dan simpul C. Begitu pun dengan sisi e_3 dan sisi e_4. Sementara itu, pada graf diatas, tidak terdapat **gelang** (***loop***), yaitu sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Dari definisi graf, himpunan sisi (E) memungkinkan berupa himpunan kosong. Jika graf tersebut mempunyai himpunan sisi yang merupakan himpunan kosong maka graf tersebut dinamakan graf kosong (*null graph* atau *empty graph*).

Contoh :

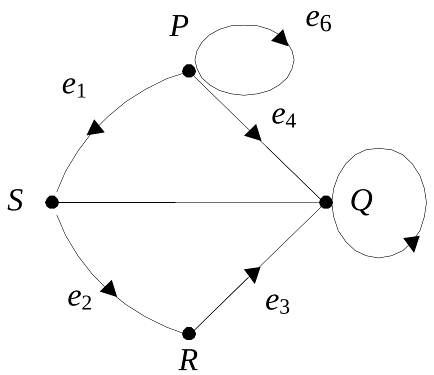
Graf kosong dengan 3 simpul (graf N_3)



Dengan memperhatikan kondisi sisinya, suatu graf dapat dikategorikan sebagai graf tidak berarah dan graf berarah. Graf tidak berarah, seperti telah dijelaskan pada contoh graf untuk jembatan Königsberg. Sementara itu, **graf berarah (*directed graph, digraph*)** merupakan graf yang mempunyai sisi yang berarah, artinya satu buah simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut merupakan simpul awal (*initial vertex*) dan simpul yang lain dikatakan sebagai simpul akhir (*terminal vertex*).

Contoh :

Graf berikut merupakan graf berarah :



Terlihat bahwa $e_1 = (P, S)$, $e_3 = (R, Q)$, dan $e_5 = (Q, Q)$
Simpul P merupkan simpul awal bagi sisi e_1 dan simpul S merupakan simpul akhir bagi sisi e_1.

4.2 Terminologi Graf

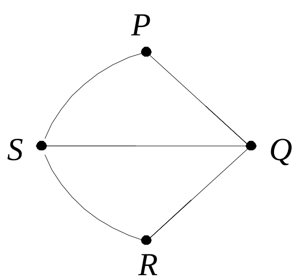
Ada beberapa terminologi graf yang perlu diketahui, antara lain : ketetanggaan antara dua simpul, bersisian , derajat suatu simpul, dan lain-lain. Berikut ini adalah beberapa terminoogi yang penting, yaitu :

1. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi.

Contoh :

Perhatikan graf berikut :



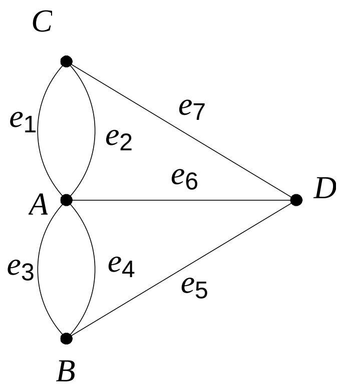
Pada graf diatas : simpul P bertetangga dengan simpul Q dan S, tetapi simpul P tidak bertetangga dengan simpul R.

2. Bersisian (*Incidency*)

Suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$.

Contoh :

Perhatikan graf dari masalah jembatan Königsberg berikut ini :



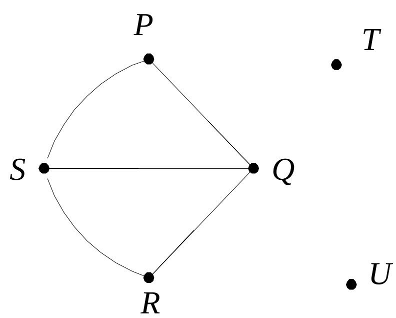
maka e_1 bersisian dengan simpul A dan simpul C , tetapi sisi tersebut tidak berisian dengan simpul B.

3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Jika suatu simpul tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya maka simpul tersebut dinamakan simpul terpencil.

Contoh :

Perhatikan graf berikut :



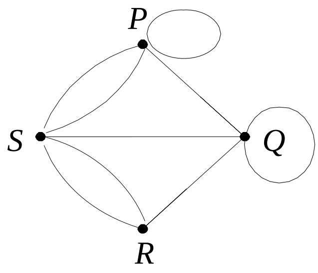
Simpul $\underline{T}$ dan simpul U merupakan simpul terpencil.

5. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Misalkan, suatu simpul v mempunyai 3 buah sisi yang bersisian dengannya maka dapat dikatakan simpul tersebut berderajat 3, atau dinotasikan oleh $d(v) = 3$.

Contoh 1:

Perhatikan graf berikut :



Pada graf diatas :

$d(P) = d(Q) = d(S) = 5$, sedangkan $d(R) = 3$.

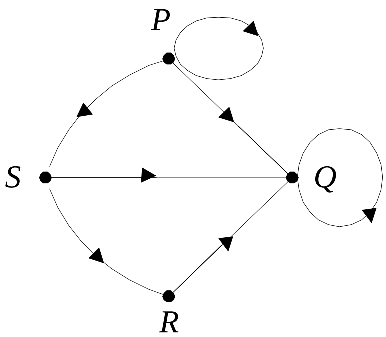
Derajat sebuah simpul pada suatu graf berarah dijelaskan sebagai berikut :

- $d_{in}(v)$ merupakan jumlah busur yang masuk ke simpul v
- $d_{out}(v)$ merupakan jumlah busur yang keluar dari simpul v

Dengan demikian derajat pada simpul tersebut, diperoleh : $d(v) = d_{in}(v) + d_{out}(v)$

Contoh 2 :

Perhatikan graf berarah berikut ini :



Pada graf diatas :

$d_{in}(P) = 1$ dan $d_{out}(P) = 3$ maka $d(P) = 4$

$d_{in}(Q) = 4$ dan $d_{out}(Q) = 1$ maka $d(Q) = 5$

$d_{in}(R) = 1$ dan $d_{out}(R) = 1$ maka $d(R) = 2$

$d_{in}(S) = 1$ dan $d_{out}(S) = 2$ maka $d(S) = 3$

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Jika $G = (V, E)$ merupakan suatu graf, maka dapat ditulis :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Contoh 2 :

Perhatikan graf pada **contoh 1**. Jumlah sisi pada graf tersebut adalah 9, sehingga Jumlah derajat pada graf tersebut adalah :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.\,|E|$$
$$= 2.9$$
$$= 18$$

atau

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(P) + d(Q) + d(R) + d(S)$$
$$= 5 + 5 + 5 + 3$$
$$= 18$$

Perhatikan graf pada **contoh 2**.
Jumlah sisi pada graf tersebut adalah 7, sehingga Jumlah derajat pada graf tersebut adalah :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2.\,|E|$$
$$= 2.7$$
$$= 14$$

atau

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(P) + d(Q) + d(R) + d(S)$$
$$= 4 + 5 + 2 + 3$$
$$= 14$$

Dengan demikian, jika kita ingin menggambar sebuah graf dengan derajat masing-masing simpul diketahui, dan ternyata jumlah derajat seluruh simpul tersebut adalah ganjil maka hal ini tak mungkin terjadi.

6. Lintasan (*Path*)

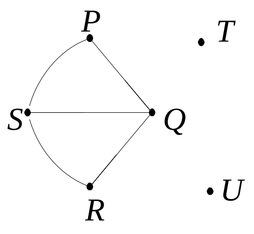
Lintasan dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G merupakan barisan sebuah sisi atau lebih (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), …, (x_{n-1}, x_n) pada G, dimana $x_0 = v_0$ dan $x_n = v_T$. Lintasan ini dinotasikan oleh :

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

Lintasan ini mempunyai panjang n, karena lintasan ini memuat n buah sisi, yang dilewati dari suatu simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_T di dalam suatu graf G. Suatu lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama dinamakan **Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)**.

Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :

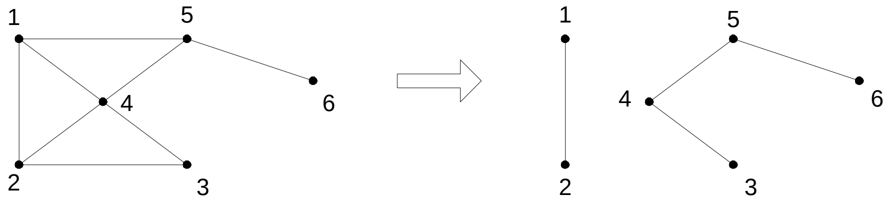


- Pada graf tersebut lintasan P, Q, R memiliki panjang 2. Sementara itu lintasan P, Q, S, R memiliki panjang 3.
- Lintasan P, Q, R, S, P dinamakan siklus atau sirkuit dengan panjang 4.
- Antara simpul P dan U maupun T tidak dapat ditemukan lintasan.

7. ***Cut-Se t***

Cut-set dari suatu graf terhubung *G* adalah himpunan sisi yang jika dibuang dari *G* menyebabkan *G* tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan dua buah subgraf . Pada graf di bawah, {(1,4), (1,5), (2, 3), (2,4)} adalah *cut-set*. Terdapat banyak *cut-set* pada sebuah graf terhubung. Himpunan {(1,5), (4,5)} juga adalah *cut-set*, {(1,4), (1,5), (1,2)} adalah *cut-set*, {(5,6)} juga *cut-set*,

tetapi {(1,4), (1,5), (4,5)} bukan *cut-set* sebab himpunan bagiannya, {(1,5), (4,5)} adalah *cut-set*.



(a) (b)

4.3 Beberapa Jenis Graf

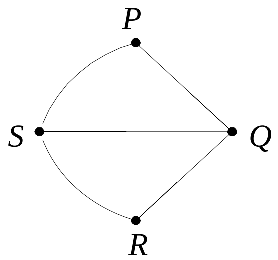
Beberapa jenis graf tak berarah yang perlu diketahui adalah :

1. Graf sederhana (*simple graph*).

Graf sederhana merupakan graf tak berarah yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda.

Contoh :

Graf sederhana

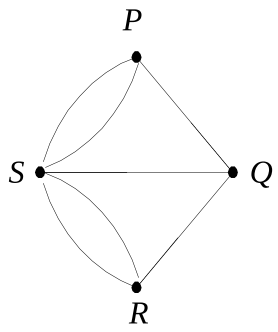


2. **Graf Ganda** (*multigraph*).

Graf ganda merupakan graf tak berarah yang tidak mengandung gelang (*loop*).

Contoh :

Graf ganda



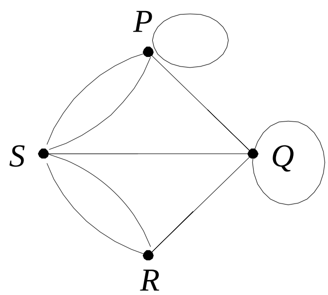
Dengan demikian, graf sederhana pun merupakan graf ganda (*multi graph*).

3. **Graf semu** (*Pseudo graph*)

Graf semu merupakan graf yang boleh mengandung gelang (*loop*).

Contoh :

Graf semu :



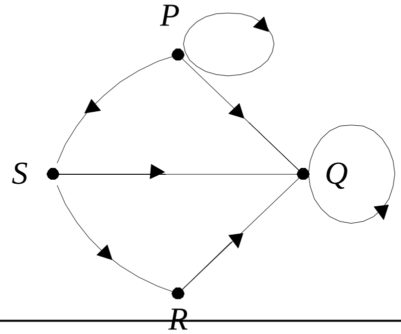
Beberapa jenis graf berarah yang perlu diketahui adalah :

1. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*).

Graf berarah merupakan graf yang setiap sisinya mempunyai arah dan tidak mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul (tak mempunyai sisi ganda)

Contoh :

Graf berarah :

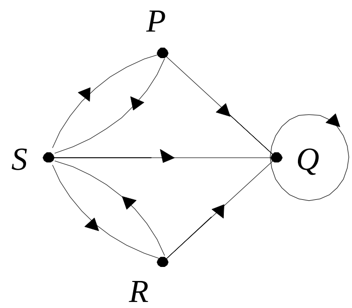


2. **Graf ganda berarah** (*directed multigraph*).

Graf ganda berarah merupakan graf berarah yang membolehkan adanya sisi ganda pada graf tersebut (boleh mempunyai dua sisi yang berlawanan antara dua buah simpul).

Contoh :

Graf ganda berarah :



Dari jenis-jenis graf yang telah dijelaskan di atas, kita dapat membuat ringkasan (sebagai bahan perbandingan), sebagai berikut :

Tabel 4.1 Jenis-jenis graf [**Rosen, 2003**]

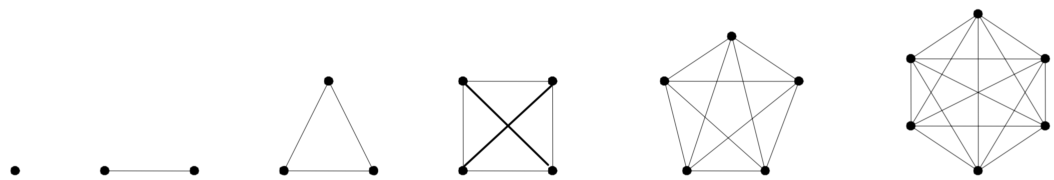
Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Gelang (loop) dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

Berikut ini adalah beberapa jenis dari graf yang perlu diketahui :

a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung (oleh satu sisi) ke semua simpul lainnya. Dengan kata lain, setiap simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n – 1)/2$ sisi.

Contoh :

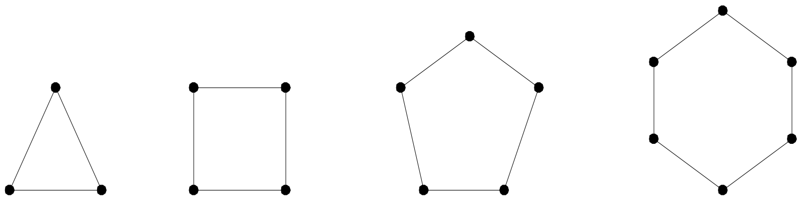


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Gambar 4.3 Grap lengkap K_n, $1 \le n \le 6$ (Rosen, 2003)

b. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* simpul dilambangkan dengan C_n.

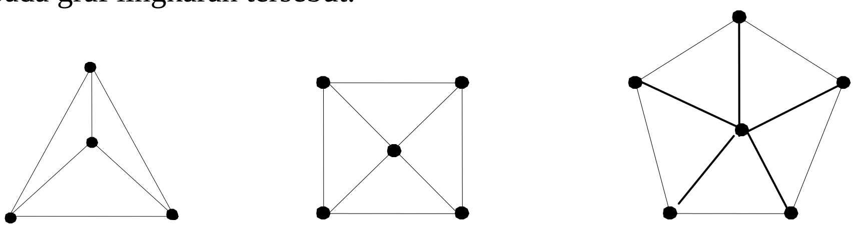


C_3 C_4 C_5 C_6

Gambar 4.4 Grap Lingkaran C_n, $3 \le n \le 6$ (Rosen, 2003)

c. Graf Roda (Wheels Graph)

Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n, dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut.

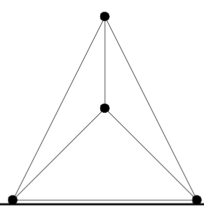


W_3 W_4 W_5

Gambar 4.5 Grap Roda W_n, $3 \le n \le 5$ (Rosen, 2003)

d. Graf Teratur (*Regular Graphs*)

Graf teratur merupakan graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul pada grap teratur adalah *r*, maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat *r*. Jumlah sisi pada graf teratur dengan n simpul adalah $\frac{nr}{2}$ sisi.



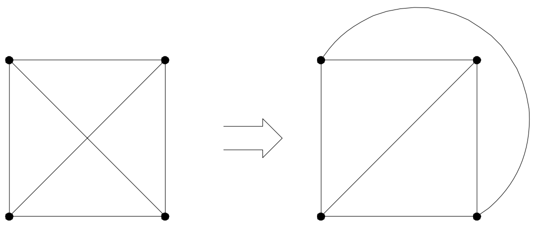
Gambar 4.5 Graf Reguler dengan Empat Simpul Berderajat 2 **(Munir, 2003)**

e. Graf Planar (*Planar Graph*) dan Graf Bidang (*Plane Graph*)

Graf yang **dapat** digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan **graf planar.** Jika tidak, maka graf tersebut dinamakan **graf tak-planar**.

Contoh 1 :

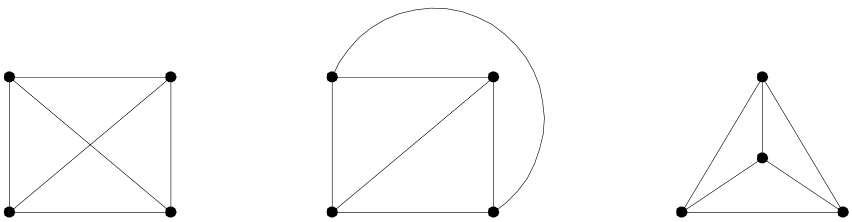
- Semua graf lingkaran merupakan graf planar
- Graf lengkap K_1, K_2, K_3, K_4 merupakan graf planar
  Tetapi graf lengkap K_n untuk n ≥ 5 merupakan graf tak-planar.
  Ilustrasi untuk graf planar K_4.



Gambar 4.6 K_4 adalah graf planar (**Munir**, 2003)

Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan **graf bidang** (*plane graph*).

Contoh 2 :

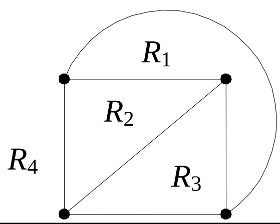


(a) (b) (c)

Gambar 4.6 Tiga buah graf planar. Graf (b) dan (c) adalah graf bidang (**Munir**, 2003)

Contoh 3 :

Perhatikan ilustrasi graf planar berikut ini :



maka graf planar diatas dikatakan terdiri dari 4 buah daerah.

Beberapa hal tentang graf planar $G(V, E)$, antara lain :

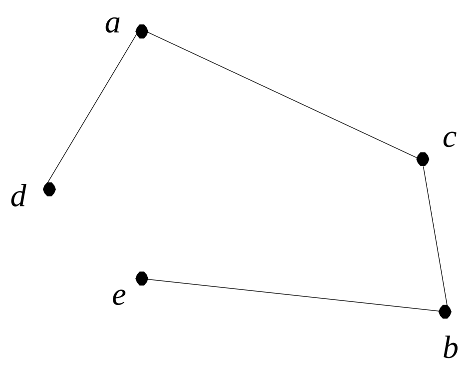
- (**Formula Euler**) Misalkan G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul, dan r merupakan jumlah daerah pada graf planar tersebut maka $r = e - v + 2$.
- Jika G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul ($v \geq 3$) maka $e \leq 3v - 6$ (**ketaksamaan Euler**).
- Jika G merupakan graf planar terhubung dengan e buah sisi dan v buah simpul ($v \geq 3$) dan tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 maka $e \leq 2v - 4$.

f. Graf bipartit (*Bipartite Graph*)

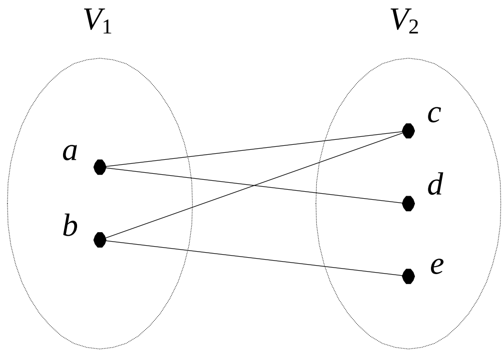
Sebuah graf sederhana G dikatakan **graf bipartit** jika himpunan simpul pada graf tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang *disjoint*, misalkan V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2. Dengan demikian, pada grap bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau V_2. Graf bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$.

Contoh :

Graf G berikut merupakan graf bipartit :



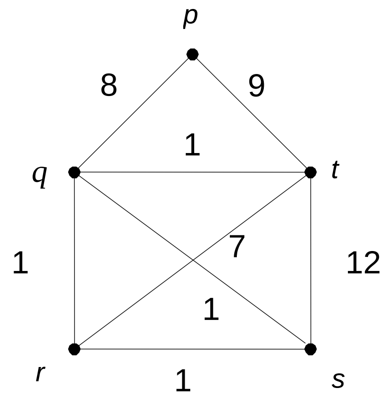
Graf diatas dapatdirepresentasikan menjadi graf bipartit $G(V_1, V_2)$, dimana V_1,= {a, b} dan V_2 = {c, d, e}



Gambar 4.7 Graf bipartit

g. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).

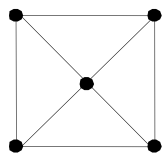


4.4. Keterhubungan dan Sub Graf

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 pada suatu graf dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2. Jika setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V pada suatu graf G terdapat lintasan dari v_i ke v_j maka graf *tersebut* dinamakan **graf terhubung** (*connected graph*). Jika tidak, maka G dinamakan **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

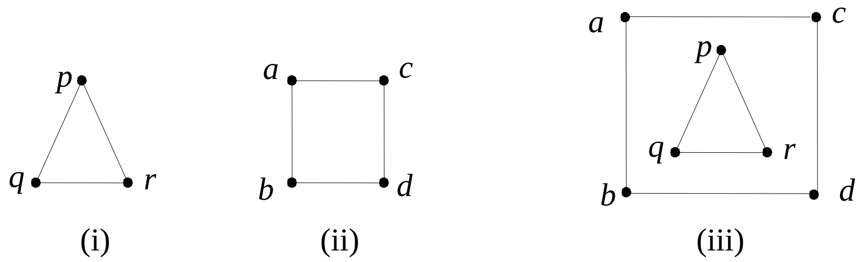
Contoh 1 :

Graf roda merupakan salah satu contoh graf terhubung:



Contoh 2 :

Perhatikan graf lingkaran berikut ini :

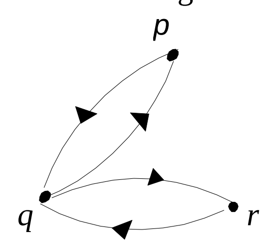


Jelas bahwa (i) C_3 dan (ii) C_4 merupakan graf terhubung. Sementara itu, graf (iii) merupakan graf tak-terhubung, karena tak ada lintasan yang menghubungkan simpul salah satu simpul pada $\{p, q, r\}$ dengan salah satu simpul pada $\{a, b, c, d\}$.

Selanjutnya, kita akan meninjau tentang keterhubungan pada suatu graf berarah. Suatu **graf berarah** *G* dikatakan **terhubung** jika kita menghilangkan arah pada graf tersebut (graf tak berarah) maka graf tersebut merupakan graf terhubung. Dua simpul, *u* dan *v*, pada graf berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*. Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat, dengan kata lain graf tersebut hanya terhubung pada graf tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*). Jika setiap pasangan simpul pada suatu graf berarah graf berarah *G* terhubung kuat maka graf G tersebut dinamakan **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*). Jika tidak, graf tersebut dinamakan **graf terhubung lemah**.

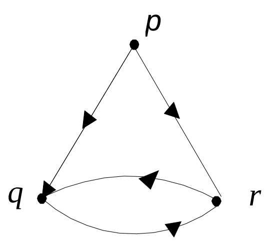
Contoh 1:

Graf berarah terhubung kuat



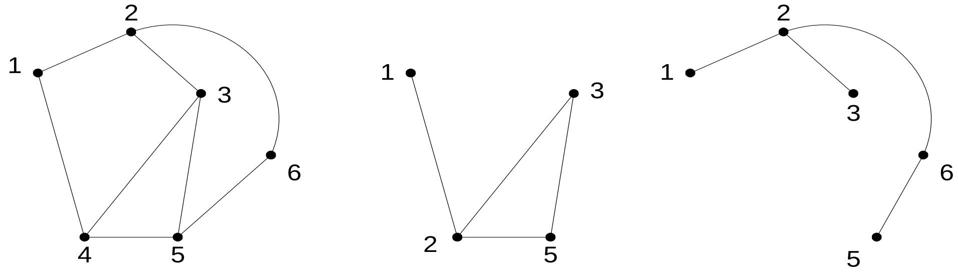
Contoh 2:

Graf berarah terhubung lemah



Misalkan $G = (V, E)$ merupakan suatu graf, maka $G_1 = (V_1, E_1)$ dinamakan **sub graf** (*subgraph*) dari *G* jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. **Komplemen** dari sub graf G_1 terhadap graf *G* adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

Contoh :

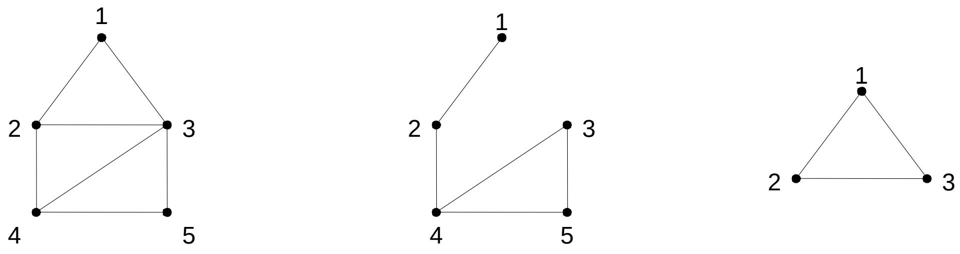


(a) Graf G_1 (b) subgraf (c) komplemen dari subgraf (b)

Gambar 4.7 Sebuah subgraf dari suatu graf dan komplemennya (**Munir**, 2003)

Misalkan, $G_1 = (V_1, E_1)$ merupakan sub graf dari graf $G = (V, E)$. Jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 memuat semua simpul dari G) maka G_1 dinamakan ***Spanning Subgraph*** (subraf merentang).

Contoh :



(a) (b) (c)

Gambar 4.8 sketsa (b) merupakan *Spanning Subgraph* dari G, sedangkan (c) bukan *Spanning Subgraph* dari G (hanya komplemen dari subgraf (b)) (**Munir**, 2003)

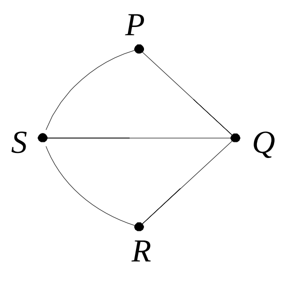
4.5 Matriks Ketetanggaan (*adjacency matrix*) dan Matriks Bersisian (*incidency matrix*) dari Suatu Graf

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah memperkenalkan bahwa dua buah simpul dikatakan *bertetangga* jika kedua simpul tersebut terhubung langsung oleh suatu sisi. Matriks ketetanggaan untuk graf sederhana merupakan matriks bukur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada graf tersebut. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

- Jika $a_{ij} = 1$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j bertetangga.
- Jika $a_{ij} = 0$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j tidak bertetangga.

Contoh :

Perhatikan graf sederhana berikut ini :



Matriks ketetanggaan dari graf tersebut adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

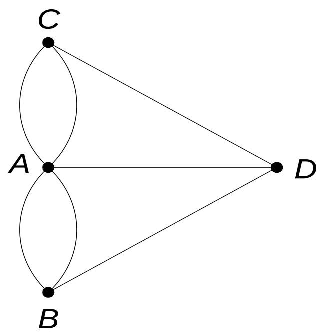
Terlihat bahwa matriks tersebut simetris dan setiap unsur diagonalnya adalah nol (0).

Matriks ketetanggaan untuk graf tak sederhana merupakan matriks bukur sangkar yang unsur-unsurnya hanya terdiri dari bilangan 0 (nol), 1 (satu) dan 2 (dua). Baris dan kolom pada matriks ini, masing-masing merupakan representasi dari setiap simpul pada graf tersebut. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

- Jika $a_{ij} = n$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j bertetangga oleh n buah sisi.
- Jika $a_{ij} = 0$ maka hal ini berarti simpul i dan simpul j tidak bertetangga.

Contoh :

Perhatikan graf dari masalah jembatan Königsberg :



Matriks ketetanggaan dari graf tersebut adalah sebagai berikut :

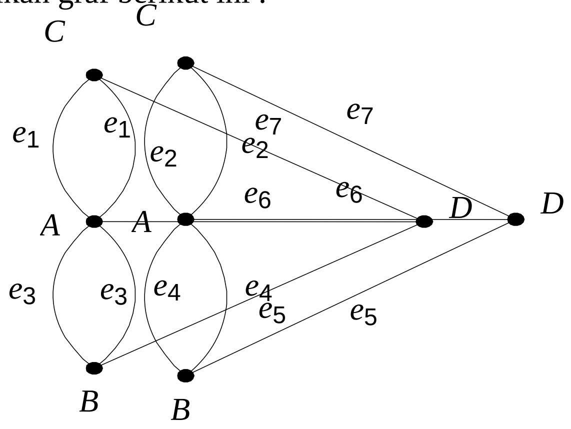
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sementara itu, suatu sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v_1 dan simpul v_2 jika e menghubungkan kedua simpul tersebut, dengan kata lain $e = (v_1, v_2)$. Seperti halnya matriks ketetanggaan, unsur-unsur matriks bersisian pun hanya terdiri dari dua bilangan yaitu 0 (nol) dan 1 (satu), tapi tidak harus bujur sangkar. Hal ini disebabkan, baris dan kolom pada matriks bersisian, masing-masing merepresentasikan simpul dan sisi pada graf yang dimaksud. Misalkan a_{ij} merupakan unsur pada matriks tersebut, maka :

- Jika a_{ij} = 1 maka hal ini berarti simpul ke-i dan sisi ke-j adalah bersisian.
- Jika a_{ij} = 0 maka hal ini berarti simpul ke-i dan sisi ke-j tidak bersisian.

Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



Bentuk matriks bersisian dari graf tersebut adalah :

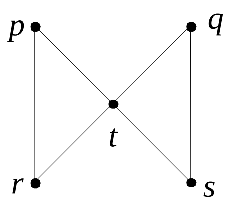
$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

4.6 Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan Euler dalam suatu graf merupakan lintasan yang melalui masing-masing sisi didalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan sirkuit Euler. Dengan demikian, sirkuit Euler merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Euler dinamakan graf Euler (*Eulerian graph*), sedangkan graf yang memuat lintasan Euler dinamakan graf semi Euler (*semi-Eulerian graph*).

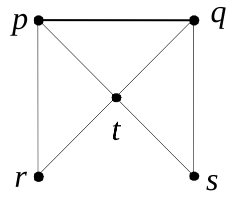
Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



G_1

Graf G1 merupakan graf Euler. karena memiliki lintasan yang membentuk lintasan tertutup (sirkuit), yaitu : *pr – rt – ts – sq – qt – tp*
Sementara itu,



G_2

Terlihat bahwa graf G2 merupakan graf semi Euler karena graf tersebut memiliki lintasan yang melalui masing-masing sisi didalam graf tersebut tepat satu kali.

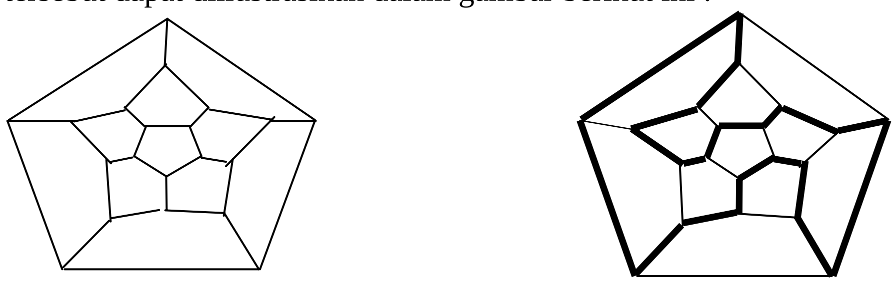
Lintasan tersebut adalah : *pq – qs – st – tp – pr – rt – tq.*

Beberapa sifat tentang lintasan dan sirkuit Euler :

- Suatu graf G merupakan graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut berderajat genap.
- Graf terhubung G merupakan graf semi Euler (memiliki lintasan Euler) jika dan hanya jika di dalam graf tersebut terdapat dua simpul berderajat ganjil.
- Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf Euler (memiliki sirkuit Euler) jika dan hanya jika setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama.
- Suatu graf terhubung berarah G merupakan graf semi Euler (memiliki lintasan Euler) jika dan hanya jika G terhubung setiap simpul pada graf tersebut memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama, kecuali dua simpul yaitu simpul petama (simpul awal lintasan) memiliki derajat keluar satu lebih besar dari pada derajat masuk dan simpul yang kedua (simpul akhir lintasan) memiliki derajat masuk satu lebih besar dari pada derajat keluar.

4.7 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Sir Wiliam Hamilton pada tahun 1859 membuat permainan dodecahedron yang ditawarkan pada pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terdiri dari 12 buah pentagonal dan ada 20 titik sudut (setiap sudut diberi nama ibu kota setiap negara) . Permainan ini membentuk perjalanan keliling dunia yang mengunjungi setiap ibu kota Negara tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal. Ini tak lain adalah mencari sirkuit Hamilton.
Masalah tersebut dapat diilustrasikan dalam gambar berikut ini :



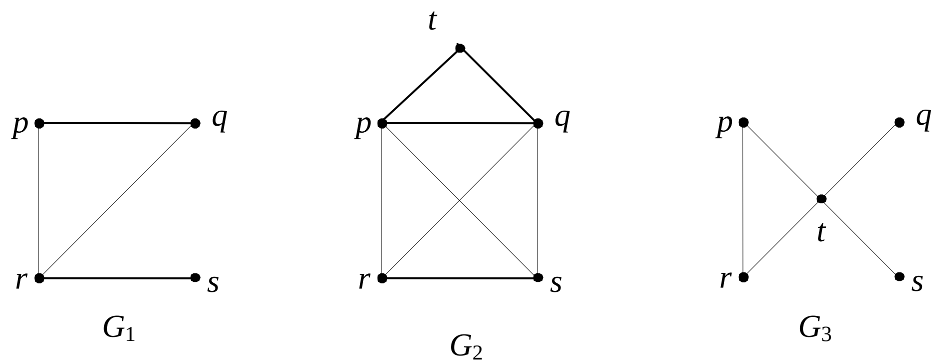
Pada ilustrasi diatas, sirkuit hamilton adalah lintasan yang dicetak tebal.

Lintasan Hamilton suatu graf merupakan lintasan yang melalui setiap simpul dalam graf tersebut tepat satu kali. Jika lintasan tersebut kembali kesimpul awal, sehingga membentuk lintasan tertutup (sirkuit) maka lintasan ini dinamakan **sirkuit Hamilton**.

Dengan demikian, sirkuit Hamilton merupakan sirkuit yang melewati masing-masing sisi tepat satu kali. Graf yang memuat sirkuit Hamilton dinamakan graf Hamilton (*Hamiltonian graph*), sedangkan graf yang memuat lintasan Hamilton dinamakan graf semi Hamilton (*semi- Hamiltonian graph*).

Contoh :

Perhatikan tiga graf di bawah ini :



Graf G_1 merupakan graf semi Hamilton, lintasan hamiltonya adalah :

$s - r - p - q - r.$

Sedangkan graf G_2 merupakan graf hamilton, sirkuit hamiltonya adalah :

$t - p - r - q - p - s - q - t$.

Sementara itu pada graf G_3 tidak terdapat lintasan maupun sirkuit hamilton.

Misalkan G merupakan graf sederhana dengan jumlah simpulnya adalah n buah (dimana n paling sedikit tiga buah). Jika derajat setiap simpulnya paling sedikit $n/2$ simpul maka graf G tersebut merupakan graf Hamilton.

Beberapa hal tentang graf hamilton :

- Setiap graf lengkap merupakan graf Hamilton.
- Pada suatu graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit Hamilton.
- Pada suatu graf lengkap G dengan n buah simpul ($n \geq 3$ dan n ganjil), terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang beririsan). Jika n genap dan $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $\frac{(n-1)}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

4.8 Graf Isomorfik dan Homeomorfik

Perhatikan dua graf berikut ini :

Dua buah graf diatas, terdiri dari empat buah simpul dimana setiap simpul adalah berderajat tiga. Walaupun secara geometri kedua tersebut berbeda tetapi pada prinsipnya
kedua graf tersebut adalah sama.

Definisi :

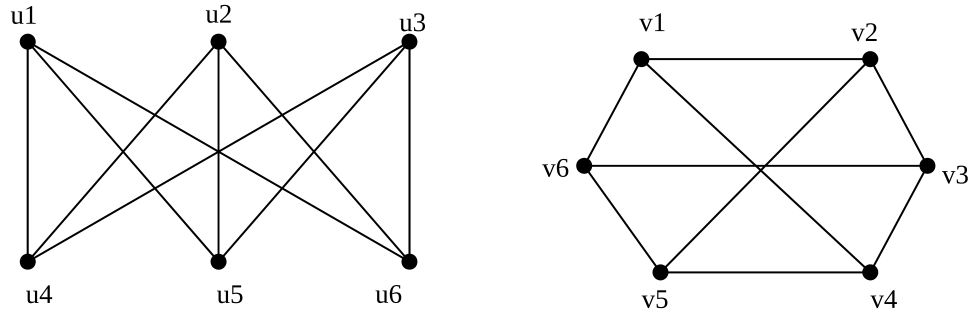
Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada kedua graf tersebut dan antara sisi-sisi keduanya sehingga jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v pada G_1 maka sisi e' pada G_2 juga bersisian dengan simpul u' dan v'.

Suatu graf dapat digambarkan dengan berbagai cara. Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Sebagai contoh dua graf diatas merupakan dua graf yang isomorfik .
Dua buah graf dikatakan isomorfik jika memenuhi ketiga syarat berikut (**Deo, 1989**):
1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu

Tetapi cara menunjukan dua graf yang isomorfik dapat diperhatikan pada contoh beriku ini.

Contoh :

Diketahui 2 buah graf berarah :



G1 **G2**

Periksa apakah kedua graf tersebut isomorfik? Jika ya, tentukan simpul-simpul yang saling berkorespondensi antara G_1 dan G_2

Jawab :

Ya, kedua graf tersebut adalah isomorfik. Terlihat graf tersebut memuat simpul dimana setiap simpulnya masing-masing berderajat tiga.
Simpul yang saling berkorespondensi dari kedua graf tersebut adalah :

- simpul u1 dengan simpul v1
- simpul u2 dengan simpul v3
- simpul u3 dengan simpul v5
- simpul u4 dengan simpul v6
- simpul u5 dengan simpul v4
- simpul u6 dengan simpul v2

Pada dua graf yang isomorfik, kedua graf tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama. Perhatikan matriks ketetanggaan dari kedua graf tersebut.

Dibawah ini adalah matriks ketetanggaan dari graf G1 :

$$M_{G1} = \begin{array}{c} \\ u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u1 & u2 & u3 & u4 & u5 & u6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sementara itu, berikut ini adalah matriks ketetanggaan dari graf G1 :

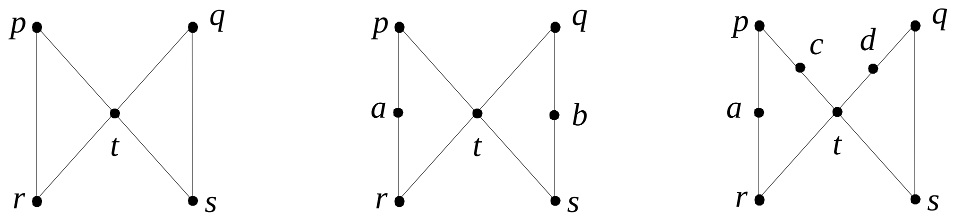
$$M_{G2} = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v3 \\ v5 \\ v6 \\ v4 \\ v2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v1 & v3 & v5 & v6 & v4 & v2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Terlihat bahwa kedua graf tersebut memiliki matriks ketetanggaan yang sama, yaitu $M_{G1} = M_{G2}$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang definisi homeomorfik antara dua buah graf. Misalkan $G_2(V_2, E_2)$ diperoleh dari $G_1(V_1, E_1)$ dengan menambahkan simpul pada sebuah sisi atau lebih pada graf tersebut, maka graf $G_1(V_1, E_1)$ dan graf $G_2(V_2, E_2)$ dinamakan **homeomorfik**.

Contoh :

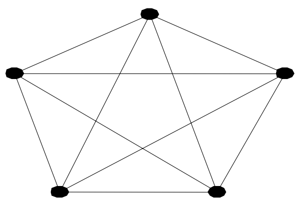
Perhatikan ketiga graf dibawah ini :



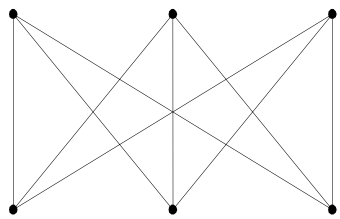
G_1 G_2 G_3

Ketiga graf diatas merupakan graf homeomorfik (*homeomorphic graphs*).

Berikutnya akan dijelaskan hubungan keplanaran suatu graf dengan graf Kuratowski. Perhatikan dua graf berikut :



Graf K_5



Graf $K_{3,3}$

Graf diatas keduanya merupakan graf tak planar.Kedua graf tersebut dinamakan graf kuratowski.

Sifat graf Kuratowski (**Munir, 2003**)adalah :

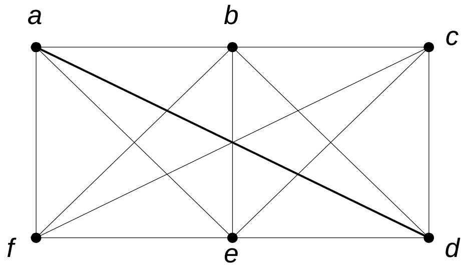
1. Kedua graf Kuratowski adalah graf teratur.
2. Kedua graf Kuratowski adalah graf tidak-planar
3. Penghapusan sisi atau simpul dari graf Kuratowski menyebabkannya menjadi graf planar.
4. Graf Kuratowski pertama adalah graf tidak-planar dengan jumlah simpul minimum, dan graf Kuratowski kedua adalah graf tidak-planar dengan jumlah sisi minimum.

Teorema Kuratowski :

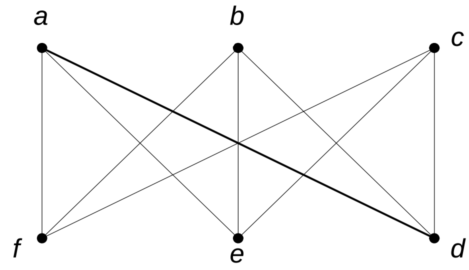
Sebuah graf tak planar *jika dan hanya jika* ia memuat sebuah subgraf yang homeomorfik dengan K_5 dan $K_{3,3}$.

Contoh :

Perhatikan graf berikut ini :



G



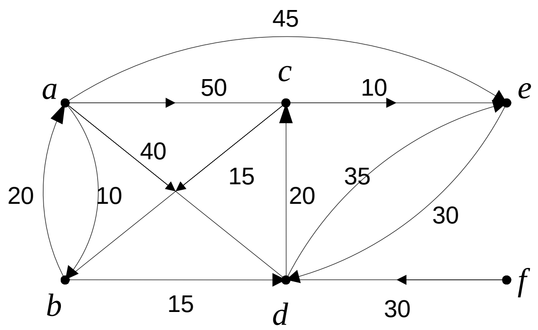
G_1

Dengan menggunakan teorema Kuratowski, jelas bahwa graf G **bukan graf planar**, karena memuat subgraf G_1 yang merupakan graf kuratowski ($K_{3,3}$).

4.9 Beberapa Aplikasi Graf

a. Lintasan Terpendek (*Shortest Path)*

Misalkan G merupakan graf berbobot (*weighted graph*), yaitu setiap sisi dari graf G memiliki bobot tertentu, seperti pada ilustrasi dibawah ini :



Hal yang biasanya dilakukan adalah menentukan lintasan terpendekpada graf tersebut. Dengan kata lain, menentukan lintasan yang memiliki total bobot minimum.

Contoh :

1. Menentukan jarak terpendek/waktu tempuh tersingkat/ongkos termurah antara dua buah kota
2. Menentukan waktu tersingkat pengiriman pesan (*message*) antara dua buah terminal pada jaringan komputer.

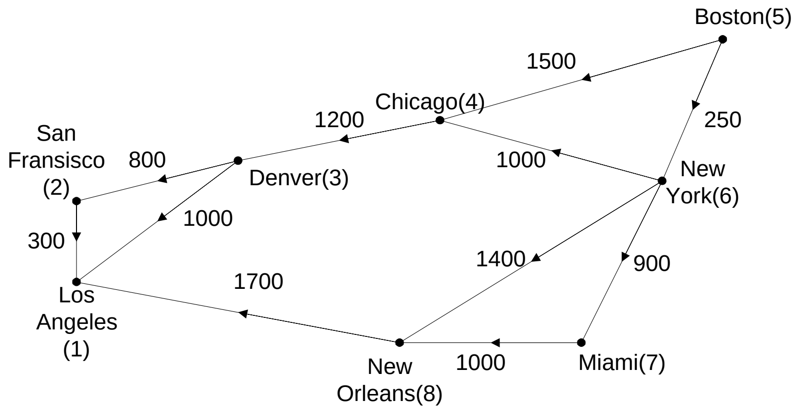
Beberapa jenis persoalan lintasan terpendek, antara lain:

a. Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
b. Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
c. Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
d. Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

Algoritma Dijkstra merupakan suatu algoritma yang digunakan untuk menentukan lintasan terpendek dari suatu simpul ke semua simpul lain. Untuk mempermudah dalam pemahaman Algoritma Dijkstra, berikut ini adalah graf dimana simpul-simpulnya merepresentasikan kota-kota di Amerika Serikat dan sisi dari graf tersebut merepresentasikan jarak antar dua kota (dalam kilometer).

Contoh :



Dengan menggunakan Algoritma Dijkstra akan ditentukan jarak terpendek dari kota Boston ke kota-kota yang lainnya.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	*S*								*D*							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
1	5	5	0	0	0	0	1	0	0	0	∞	∞	∞	1500	∞	250	∞	∞
2	6	5, 6	0	0	0	0	1	1	0	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
3	7	5, 6, 7	0	0	0	0	1	1	1	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
4	4	5, 6, 4	0	0	0	1	1	1	1	0	∞	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
5	8	5, 6, 8	0	0	0	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
6	3	5, 6, 4, 3	0	0	1	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
7	2	5, 6, 4, 3, 2	0	1	1	1	1	1	1	1	3350	3250	2450	1250	∞	250	1150	1650

Jadi, lintasan terpendek dari:

5 ke 6 adalah 5, 6 dengan jarak = 250 km

5 ke 7 adalah 5, 6, 7 dengan jarak = 1150 km
5 ke 4 adalah 5, 6, 4 dengan jarak = 1250 km
5 ke 8 adalah 5, 6, 8 dengan jarak = 1650 km
5 ke 3 adalah 5, 6, 4, 3 dengan jarak = 2450 km
5 ke 2 adalah 5, 6, 4, 3, 2 dengan jarak = 3250 km
5 ke 1 adalah 5, 6, 8, 1 dengan jarak = 3350 km

b. Persoalan Perjalanan Pedagang (*Travelling Salesperson Problem* - TSP)

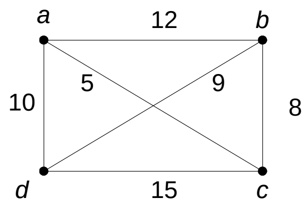
Seperti halnya contoh pada (a), misalkan diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan ia harus menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan. Ini merupakan masalah menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

Contoh 1 :

Pak Pos akan mengambil surat di bis surat yang tersebar pada *n* buah lokasi di berbagai sudut kota.

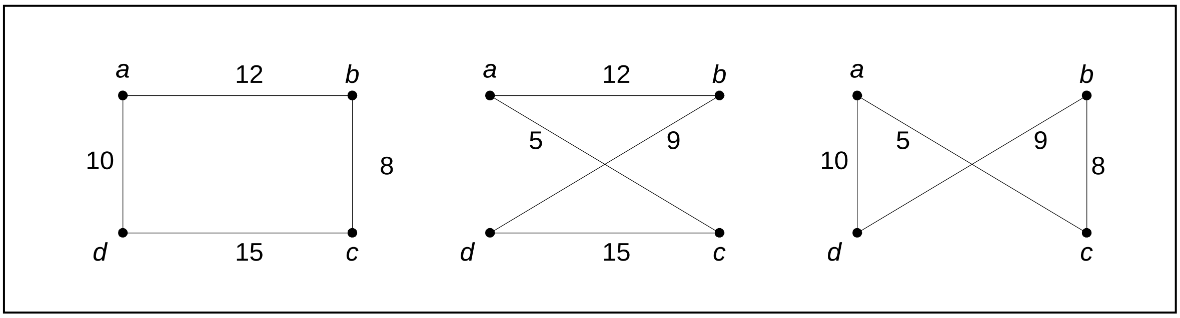
Contoh 2 (Munir, 2003) :

Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan n simpul: (n - 1)!/2.



Graf di atas memiliki (4 – 1)!/2 = 3 sirkuit Hamilton, yaitu:

- I_1 = (*a*, *b*, *c*, *d*, *a*) atau (*a*, *d*, *c*, *b*, *a*) ==> panjang = 10 + 12 + 8 + 15 = 45
- I_2 = (*a*, *c*, *d*, *b*, *a*) atau (*a*, *b*, *d*, *c*, *a*) ==> panjang = 12 + 5 + 9 + 15 = 41
- I_3 = (*a*, *c*, *b*, *d*, a) atau (*a*, *d*, *b*, *c*, *a*) ==> panjang = 10 + 5 + 9 + 8 = 32

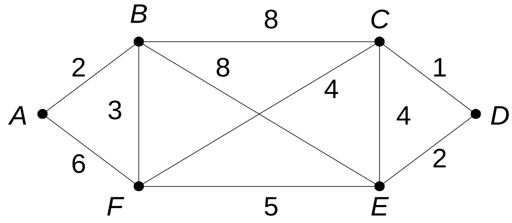


Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah I_3 = (*a*, *c*, *b*, *d*, *a*) atau (*a*, *d*, *b*, *c*, *a*) dengan panjang sirkuit = 10 + 5 + 9 + 8 = 32.

c. Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

Permasalahan ini, pertama kali dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962, yaitu : Seorang tukang pos akan mengantar surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.
Permasalahan tersebut merupakan masalah menentukan sirkuit Euler di dalam suatu graf.

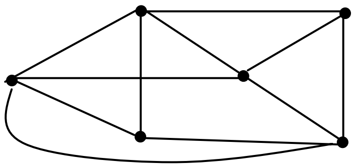
Contoh (Munir, 2003) :



Lintasan yang dilalui tukang pos adalah *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *C*, *E*, *B*, *F*, *A*.

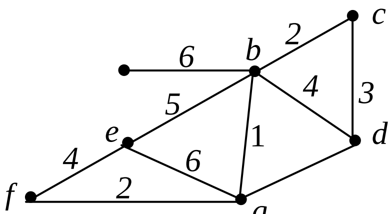
Latihan

1. Periksa, apakah graf berikut merupakan garaf Euler atau graf semi Euler atau bukan keduanya !   (jelaskan)



   Tentukan urutan sisi yang mendukung jawaban anda !

2. Tentukan *spanning subgraf* dari graf berikut :



4. Tentukan bilangan kromatik dari graf lingkaran C_n dan graf roda W_n untuk suatu n bilangan asli !   (Jelaskan)

5. Gambarkan graf dengan lima buah simpul, dimana masing-masing simpul berderajat 2, 3, 4, 1, dan 3 !

6. Tentukan matriks ketetanggaan dari graf berikut ini :